SYSTEMES DE POINTS DANS LES DG-CATEGORIES SATUREES

Bertrand Toën, Michel Vaquié

SYSTÈMES DE POINTS DANS LES DG-CATÉGORIES SATURÉES

BERTRAND TOËN AND MICHEL VAQUIÉ

À Vadim Schechtman, avec admiration et amitié.

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous considérons le problème de réaliser géométriquement les catégories triangulées (plutôt les dg-catégories triangulées) comme des catégories dérivées de variétés algébriques. Pour cela, on introduit la notion de *système de points* dans une dg-catégorie saturée T. Nous montrons que la donnée d'un tel système permet de construire un espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$, de type fini, lisse et séparé, ainsi qu'un dg-foncteur de T vers une version tordue de la dg-catégorie dérivée de $M_{\mathcal{P}}$. On montre de plus que ce dg-foncteur est une équivalence si et seulement si $M_{\mathcal{P}}$ est propre. Tout au long de ce travail nous étudions les t-structures sur les familles algébriques d'objets dans T, ce qui possède possiblement un intérêt en soi indépendant du thème de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Toute variété propre et lisse X sur un corps k (ici algébriquement clos) donne lieu à une dg-catégorie $L_{parf}(X)$ des complexes parfaits sur X. La dg-catégorie, souvent considérée comme l'espace non-commutatif associé à X, se rappelle de très nombreux invariants cohomologiques et géométriques de la variété X (voir par exemple [Ro, To2]). Cependant, la présence de variétés qui partagent un même catégorie dérivée implique qu'il est en général impossible de reconstruire X à partir de $L_{parf}(X)$, et quand bien même une telle reconstruction est possible il existe de très nombreux choix pour X.

Dans [To-Va1] nous avons introduit une construction dans le sens inverse $T \mapsto \mathcal{M}_T$, qui à une dg-catégorie T associe le (∞-)champ classifiant des objets dans T. Cette construction n'est pas inverse

Date: Mars 2015.

de $X \mapsto L_{parf}(X)$, mais est adjointe en un sens précis (voir [To4, §3.1]). Lorsque T s'écrit de la forme $L_{parf}(X)$, la variété X se retrouve comme un ouvert $X \subset \mathcal{M}_T$ (modulo une $\mathbb{G}_m$-gerbe triviale), qui correspond à la partie de $\mathcal{M}_T$ qui classe les faisceaux gratte-ciel associés aux points de X vus comme complexes parfaits sur X. Un autre choix de variété X' telle que $T \simeq L_{parf}(X')$ donne lieu à un autre ouvert $X' \subset \mathcal{M}_T$. Ceci montre que la reconstruction d'une variété X telle que $T \simeq L_{parf}(X)$ n'est envisageable que si l'on spécifie un sous-ensemble $\mathcal{P}$ des classes d'équivalence d'objets de T correspondant aux gratte-ciel de X vus comme objets de T.

Le résultat principal de ce travail est le théorème 7.2, dans le quel nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur un ensemble $\mathcal{P}$ de classes d'équivalence d'objets dans une dg-catégorie T propre et lisse, pour qu'il existe un espace algébrique X, lisse, séparé et de type fini sur k, une classe $\alpha \in H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m)$ et un dg-foncteur

$$\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L^{\alpha}_{parf}(X),$$

qui identifie l'ensemble $\mathcal{P}$ aux gratte-ciel de X (où $L^{\alpha}_{parf}(X)$ est la dg-catégorie des complexes parfaits sur X tordus par α). On montre de plus que $\phi_{\mathcal{P}}$ est une équivalence si et seulement si X est propre. Cet énoncé est une réponse possible au problème de savoir si une dg-catégorie propre et lisse T est d'origine géométrique. Cependant, plus qu'un simple théorème de reconstruction nous pensons que notre résultat peut être un outil utile pour construire des équivalences entre catégories dérivées, bien que cet apsect ne sera pas discuté en détail dans ce travail (voir cependant §8).

Les conditions sur la dg-catégorie T et l'ensemble $\mathcal{P}$ qui constituent les hypothèses de notre théorème ne peuvent pas se résumer dans cette introduction, et une grande partie de ce travail consiste en l'introduction des notions qui entrent en jeu. Elles peuvent cependant se décliner en quatre grandes familles de conditions que nous allons brièvement commenter.

(1) La dg-catégorie T est saturée.
(2) Les objets de $\mathcal{P}$ sont des objets ponctuels deux à deux orthogonaux et co-engendrent T.
(3) Les objets de $\mathcal{P}$ co-engendrent une t-structure parfaite et ouverte sur T.
(4) La famille des objets de $\mathcal{P}$ est bornée.

La première condition affirme que T est propre, lisse et triangulée (voir [To-Va1]), ce qui est une hypothèse naturelle et incontournable si l'on souhaite reconstruire une variété propre et lisse X. Par ailleurs, ces hypothèses impliquent l'existence d'un foncteur de Serre pour T (voir notre §1), ce qui intervient de manière cruciale tout au long de l'article.

La condition (2) contraint le comportement cohomologique des objets de $\mathcal{P}$. On demande par exemple que l'on ait $T(x,x) \simeq Sym_k(Ext^1(x,x)[1])$ avec $Ext^1(x,x)$ de dimension uniforme d. Par ailleurs, si $x \neq y$ on demande que $T(x,y) \simeq 0$. On doit aussi avoir $S_T(x) \simeq x[d]$ pour tout $x \in \mathcal{P}$, où S_T est le foncteur de Serre de T. Enfin, on demande que l'ensemble des objets de $\mathcal{P}$ soit une *spanning class* au sens de Bridgeland: si $T(y,x) \simeq 0$ pour tout $x \in \mathcal{P}$ alors $y \simeq 0$.

La condition (3) est la plus délicate et la plus indirecte. Tout d'abord, on déclare qu'un objet $y \in T$ est *positif* si pour tout $x \in \mathcal{P}$, le complexe $T(y,x)$ est cohomologiquement concentré en degré négatif. Une première condition est que cette notion de positivité définisse une t-structure sur la catégorie triangulée $[T]$ associée à T. Cette t-structure est dite co-engendrée par l'ensemble $\mathcal{P}$. On demande de plus qu'elle soit *ouverte*, c'est à dire qu'être un objet du cœur de cette structure soit une condition ouverte (qui est une manière d'imposer une semi-continuité pour les objets de cohomologie associés à la t-structure). Cette notion demande une étude des t-structures induites sur les familles algébriques d'objets de T (voir notre §3) et nous ne sommes pas arrivés à la décrire de manière simple en termes de T seule, on encore à donner des conditions suffisantes pour qu'elle soit automatique. On demande aussi que la t-structure soit *parfaite*, ce qui signifie essentiellement que son cœur est noethérien et que les foncteurs de troncations préservent les objets compacts. Encore une fois nous ne sommes pas arrivés à décrire cette condition simplement en termes de T.

Enfin, la dernière condition (4) affirme que la famille d'objets $\mathcal{P}$ vit dans une partie quasi-compacte du champ des objets $\mathcal{M}_T$ ce qui peut se traduire par l'existence d'une borne uniforme sur la cohomologie des objets de $\mathcal{P}$ par rapport à un générateur compact (voir [To-Va1, §3.3]).

Sous ces conditions (1) à (4), nous montrons l'existence d'un espace de modules grossier $M_{\mathcal{P}}$ qui classe les objets de $\mathcal{P}$. On montre que cet espace est un espace algébrique de type fini, séparé et lisse sur k. Le champ des objets de $\mathcal{P}$ est lui une $\mathbb{G}_m$-gerbe $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \longrightarrow M_{\mathcal{P}}$ décrit par une dg-algèbre d'Azumaya (au sens de [To4]) naturelle. Si on note $\alpha \in H^2_{et}(M_{\mathcal{P}}, \mathbb{G}_m)$ la classe de cette gerbe, on montre l'existence d'un *dg-foncteur de décomposition*

$$\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L^{\alpha}_{parf}(M_{\mathcal{P}}),$$

qui est à rapprocher de la décomposition spectrale d'une représentation comme faisceau sur l'espace des représentations irréductibles d'un groupe. Ce dg-foncteur est une quasi-équivalence sur les sous-dg-catégories pleine formées des points, et on montre que c'est une quasi-équivalence si et seulement si $M_{\mathcal{P}}$ est de plus propre (sans être arrivé à mettre au jour un critère simple qui implique la propreté de $M_{\mathcal{P}}$).

Pour conclure, nous souhaitons signaler que nous ne considérons pas notre théorème principal comme réellement optimal, mais plutôt comme un premier pas, et qu'il serait souhaitable de l'améliorer. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà signalé, certaines conditions, particulièrement autour de la t-structure, sont délicates à décrire en termes de T seule. Leurs vérifications sont parfois difficiles dans la pratique, et il est fort probable que l'on puisse donner des améliorations (par exemple en donnant des conditions suffisantes sur une t-structure pour être ouverte ou encore parfaite). Par ailleurs, nous démontrons que le foncteur $\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L^{\alpha}_{parf}(M_{\mathcal{P}})$ est une équivalence seulement si X est propre, sans donner pour autant de condition qui permette de s'en assurer. Encore une fois, dans la pratique cela veut dire qu'il faut vérifier la propreté de X au cas par cas. On devrait pouvoir améliorer cela en rajoutant, par exemple, des conditions de stabilités en plus de la donnée de $\mathcal{P}$. A notre décharge, notre point de départ est une dg-catégorie propre et lisse générale, qui peut ne rien avoir à voir, à priori, avec la dg-catégorie dérivée d'une variété algébrique, on pourrait prendre par exemple des dg-catégories d'origines topologiques ou symplectiques (comme les catégories de type Fukaya). La conclucion du théorème 7.2 est ainsi relativement forte, et il n'est pas suprenant que les hypothèses le soient proportionnellement.

Enfin, pour finir, nous avons inclus deux exemples de paire $(T, \mathcal{P})$ dans notre dernier paragraphe, mais nous n'avons pas fait l'exercice de vérifier toutes les conditions qui forment les hypothèses de notre théorème, notre but étant ici plus d'illustrer la signification du théorème plutôt que de donner de réelles applications. Il serait donc intéressant d'avoir un exemple d'application du théorème 7.2 où l'on obtienne une équivalence de catégories dérivées qui n'était pas encore connue. Nous pensons par exemple à la symétrie mirroir: une variété symplectique N munie d'une fibration en tores lagrangiens $N \to S$, semble pouvoir donner une paire $(T, \mathcal{P})$, où T est un dg-modèle pour la $\mathcal{A}_\infty$-catégorie de Fukaya de N, et $\mathcal{P}$ est la famille d'objets correspondant à la famille de tores lagrangiens donnée par les fibres de $N \to S$. Ici, l'espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$ serait bien entendu un candidat au miroir de M (voir l'introduction de [Ab]), modulo d'innombrables complications techniques (e.g. le corps de base k doit être remplacé par quelque chose comme $k((t))$, etc). Malheureusement, notre manque de compréhension des catégories de Fukaya ne nous permet pas d'en dire plus dans ce travail.

Conventions: Tout au long de ce travail nous travaillerons au-dessus d'un corps algébriquement clôs k de caractéristique nulle.

1. Dg-catégories saturées

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie Morita des dg-catégories (k-linéaires) de [To2], auquel nous renvoyons le lecteur pour les détails. Nous travaillerons dans $Ho(dg-cat)$, la catégorie homotopique des dg-catégories k-linéaires. Concrètement, cela signifie que nous travaillons à quasi-équivalence de dg-catégories près, sans que cela soit dit de manière explicite. Il nous arrivera par exemple d'utiliser l'expression *dg-foncteur* pour signifier en réalité un morphisme dans $Ho(dg-cat)$, ou encore *limites* pour signifier *limites homotopiques.* De même certaines constructions seront décrites de manière naïve et demanderaient d'expliciter certains modèles explicites (ce que nous laissons au lecteur le soin de faire, ou pas). Nous rencontrerons parfois des dg-catégories non petites, et nous laissons le soins au lecteur de fixer des univers pour donner un sens à certains énoncés (voir par exemple [To2, To4]).

Soit T une petite dg-catégorie sur k. Nous noterons $\widehat{T} := \mathbb{R}\underline{Hom}(T^{op}, \widehat{k})$, la dg-catégorie obtenue à partir de T en y rajoutant des colimites homotopiques (voir [To2]). L'objet $\widehat{T}$ est bien défini dans $Ho(dg-cat)$, la catégorie homotopique des dg-catégories. Un modèle explicite de $\widehat{T}$ est la dg-catégorie des T^{op}-dg-modules cofibrants et fibrants (voir [To-Va1, §2.2]).

On dispose d'un plongement de Yoneda $\underline{h} : T \longrightarrow \widehat{T}$ qui identifie T à une sous-dg-catégorie pleine de $\widehat{T}$. Le morphisme $\underline{h}$ se factorise par $\widehat{T}_c \subset \widehat{T}$ la sous-dg-catégorie pleine formée des objets compacts.

Nous rappelons la terminologie suivante.

- La dg-catégorie T est *triangulée* si le morphisme h induit une quasi-équivalence $T \simeq \widehat{T}_c$.
- La dg-catégorie T est *lisse sur k* s'il existe une dg-algèbre B sur k, avec $\widehat{T}$ quasi-équivalente à $\widehat{B}$, et telle que B soit un $B \otimes_k B^{op}$-dg-module compact.
- La dg-catégorie T est *propre sur k* s'il existe une dg-algèbre B sur k, avec $\widehat{T}$ quasi-équivalente à $\widehat{B}$, et telle B soit compacte comme k-dg-module (i.e. soit un complexe parfait de k-espaces vectoriels).
- La dg-catégorie T est *saturée* si elle est propre, lisse et triangulée.

Les dg-catégories saturées possèdent de fabuleuses propriétés de dualité. Elles sont par exemple les objets pleinement dualisables de la catégorie monoïdale symétrique des petites dg-catégories à équivalence de Morita près (voir [To4, Prop. 2.5]), et aussi les objets pleinement dualisables de la 2-catégorie monoïdale symétrique des dg-catégories compactement engendrées et dg-foncteurs continus (voir [Lu2]). En ce qui nous concerne, nous rentiendrons les faits suivants.

(1) Pour deux dg-catégories saturées T_1 et T_2, la dg-catégorie $\mathbb{R}\underline{Hom}(T_1, T_2)$ est saturée. Elle est de plus naturellement équivalente à $(\widehat{T_1 \otimes T_2^{op}})_c$, la dg-catégorie des (T_1, T_2)-dg-bimodules compacts. Le dg-bimodule correspondant à un morphisme f sera généralement noté $\Gamma(f)$. Ce dg-bimodule envoie $(a, b) \in T_1 \otimes T_2^{op}$ sur le complexe $T_2(b, f(a))$.

(2) Toute dg-catégorie saturée T possède un foncteur de Serre S_T. Il s'agit d'un endomorphisme $S_T : T \longrightarrow T$ de T, tel que le dg-bimodule correspondant soit donné par la formule
$$\Gamma(S_T) : (a,b) \mapsto T(a,b)^\vee := \underline{Hom}(T(a,b),k).$$
On dispose donc de quasi-isomorphisme naturel
$$T(a,b)^\vee \simeq T(b, S_T(a)).$$
L'endomorphisme S_T de T est toujours une auto-équivalence.

(3) Soit $f : T_1 \longrightarrow T_2$ un dg-foncteur entre dg-catégories saturées. Alors f possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche (au sens de [To4, §3.1]), notés respectivement
$$f_* : T_2 \longrightarrow T_1 \qquad f_! : T_2 \longrightarrow T_1.$$
Si f correspond au dg-bimodule $\Gamma(f) \in \widehat{T_1 \otimes T_2^{op}}$, alors f_* correspond au (T_2,T_1)-dg-bimodule
$$\Gamma(f_!) : (a,b) \mapsto T_2(f(b),a).$$
L'adjoint à gauche $f_!$ est quand à lui donné par la formule
$$f_! = S_{T_1}^{-1}(f_*)S_{T_2},$$
où S_{T_i} est le foncteur de Serre de la dg-catégorie T_i. En d'autres termes le dg-bimodule correspondant à $f_!$ est $(a,b) \mapsto T_2(a, fS_{T_1}(b))^\vee$.

2. Espaces de modules d'objets simples dans une dg-catégorie saturée

Soit T une dg-catégorie saturée sur k. On définit un préfaisceau simplicial sur la catégorie Aff_k des schémas affines sur k
$$\mathcal{M}_T : Aff_k^{op} \longrightarrow sSet,$$
par la formule
$$\mathcal{M}_T(Spec\, A) := Map_{dg-cat}(T^{op}, \widehat{A}_c).$$
Le préfaisceau $\mathcal{M}_T$ est un champ pour la topologie fpqc (voir [To-Va1]). De plus, pour tout champ $F \in \mathbf{St}_k$ on dispose d'une équivalence naturelle
$$Map_{\mathbf{St}_k}(F, \mathcal{M}_T) \simeq Map_{dg-cat}(T^{op}, L_{parf}(F)),$$
où $L_{parf}(F)$ est la dg-catégorie des complexes parfaits sur F définie par
$$L_{parf}(F) := \lim_{Spec\, A \longrightarrow F} \widehat{A}_{parf}.$$
Il s'agit ici d'une limite homotopique dans la théorie homotopique des dg-catégories (voir [To-Ve2] pour plus de détails sur la descente).

Le principal théorème de [To-Va1] affirme que $\mathcal{M}_T$ est un champ localement algébrique et localement de présentation finie sur k. Dans ce travail nous nous restreindrons au sous-champ $\mathcal{M}_T^{simp} \subset \mathcal{M}_T$, formé des objets simples. Par définition, un point de $\mathcal{M}_T(Spec\, A)$ correspond à un $T^{op} \otimes_k A$-dg-module compact. Un tel $T^{op} \otimes_k A$-dg-module E possède un complexe d'endomorphismes $\mathbb{R}\underline{Hom}(E,E)$ qui est un complexe de A-dg-modules. Ce complexe est de plus parfait sur A car T est saturée. Par définition, l'objet $E \in \mathcal{M}_T(Spec\, A)$ est dit *simple* si le complexe parfait $\mathbb{R}\underline{Hom}(E,E)$ vérifie les deux conditions suivantes.

- L'amplitude de $\mathbb{R}\underline{Hom}(E,E)$ est contenue dans $[0,\infty]$.

- Le morphisme naturel $A \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(E,E)$ induit par l'identité de E, induit pour tout morphisme d'anneaux $A \longrightarrow A'$ un isomorphisme

$$A' \simeq H^0(\mathbb{R}\underline{Hom}(E, E \otimes_A A')).$$

Par semi-continuité on voit que l'inclusion naturelle $\mathcal{M}_T^{simp} \subset \mathcal{M}_T$ est une immersion ouverte de champs. On en déduit donc que $\mathcal{M}_T^{simp}$ est lui-même un champ localement algébrique et localement de présentation finie. Par ailleurs, l'annulation des Ext négatifs des objets simples implique que $\mathcal{M}_T^{simp}$ est un 1-champ d'Artin localement de présentation finie (voir [To-Va1, §3.4]). Enfin, le fait que les objets simples ne possèdent que les scalaires comme endomorphismes de degré zéro implique que $\mathcal{M}_T^{simp}$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe au-dessus d'un espace algébrique M_T^{simp} localement de présentation finie sur k. De manière plus explicite, la projection

$$\pi : \mathcal{M}_T^{simp} \longrightarrow M_T^{simp}$$

est le morphisme quotient pour l'action naturelle du champ en groupes $K(\mathbb{G}_m, 1)$ sur $\mathcal{M}_T^{simp}$ qui consiste à tensoriser par des fibrés en droites de la base. Pour $Spec\, A \in Aff_k$, le groupe simplicial $K(A^*, 1)$ opère naturellement sur l'ensemble simplicial $\mathcal{M}_T(A)$ par son action naturelle sur la dg-catégorie $\widehat{A}_c$ des complexes parfaits de A-dg-modules. Lorsque $Spec\, A$ décrit Aff_k cela définit une action du champ en groupes $K(\mathbb{G}_m, 1)$ sur $\mathcal{M}_T^{simp}$ dont le quotient est M_T^{simp}. On peut donc écrire

$$M_T^{simp} \simeq [\mathcal{M}_T^{simp}/K(\mathbb{G}_m, 1)]$$

de sorte à ce que la projection $\pi : \mathcal{M}_T^{simp} \longrightarrow M_T^{simp}$ soit le morphisme quotient.

Notons que la gerbe $\mathcal{M}_T^{simp}$ au-dessus de M_T^{simp} est en général non-triviale. Elle est cependant donnée par une dg-algèbre d'Azumaya sur M_T^{simp} au sens de [To4], qui peut-être construite de la manière suivante. Sur le champ $\mathcal{M}_T^{simp}$, on dispose d'une T^{op}-dg-module universel $\mathcal{E}$, qui après oubli de la structure de T^{op}-dg-module fournit un complexe parfait $\mathcal{E}_0$ sur $\mathcal{M}_T^{simp}$. La dg-catégorie des complexes parfaits sur $\mathcal{M}_T^{simp}$ possède des sous-dg-catégories pleines

$$L_{parf}^{\chi}(\mathcal{M}_T^{simp}) \subset L_{parf}(\mathcal{M}_T^{simp}),$$

où χ parcours l'ensemble des caractères $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{G}_m$, et où $L_{parf}^{\chi}(\mathcal{M}_T^{simp})$ consiste en les complexes parfaits de poids χ: un complexe parfait $E \in L_{parf}(\mathcal{M}_T^{simp})$ vit dans $L_{parf}^{\chi}(\mathcal{M}_T^{simp})$ si et seulement si pour toute gerbe résiduelle $B\mathbb{G}_m \subset \mathcal{M}_T^{simp}$ la restriction de E à $B\mathbb{G}_m$ est un complexe de représentations de $\mathbb{G}_m$ pures de poids 1. Notons que si $\mathcal{M}_T^{simp,\nu}$ désigne un ouvert quasi-compact de $\mathcal{M}_T^{simp}$ (voir [To-Va1, §3.3]), alors les inclusions naturelles définissent une quasi-équivalence de dg-catégories

$$\bigoplus_{\chi \in \mathbb{Z}} L_{parf}^{\chi}(\mathcal{M}_T^{simp,\nu}) \simeq L_{parf}(\mathcal{M}_T^{simp,\nu}).$$

Cette décomposition n'est plus valable sur $\mathcal{M}_T^{simp}$ tout entier dûe à la non-quasi-compacité.

Nous disposons donc d'un complexe parfait universel $\mathcal{E}_0$ sur $\mathcal{M}_T^{simp}$, pur de poids 1. Cet objet est de plus un générateur compact *local* de $L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_T^{simp})$, au sens où son image réciproque sur tout affine $Spec\, A \longrightarrow \mathcal{M}_T^{simp}$ est un générateur compact de $D(A)$ la catégorie dérivée de A. Il s'en suit, d'après le formalisme général de [To4], que le faisceau en dg-algèbres parfaites $\mathcal{A} := \mathbb{R}\underline{End}(\mathcal{E}_0)$ est pur de poids

0, donc vit dans $L_{parf}^{\chi=0}(\mathcal{M}_T^{simp}) \simeq L_{parf}(M_T)$, et est de plus une dg-algèbre d'Azumaya sur l'espace algébrique M_T^{simp}. D'après [To4, Cor. 4.8], elle détermine une classe $\gamma(\mathcal{A}) \in H^2_{et}(M_T^{simp}, \mathbb{G}_m)$ qui n'est autre que la classe de la gerbe $\mathcal{M}_T^{simp} \longrightarrow M_T^{simp}$. Par construction, on a une quasi-équivalence de dg-catégories

$$L_{parf}(\mathcal{A}) \simeq L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_T^{simp}),$$

où le membre de gauche est la dg-catégorie des $\mathcal{A}$-dg-modules parfaits sur M_T^{simp}. Nous renvoyons à [To4] pour plus de détails.

3. Extension des scalaires et t-structures

Comme précédemment, soit T une dg-catégorie triangulée sur k et $\widehat{T}$ la dg-catégorie des dg-modules sur T^{op}. On note $\underline{h} : T \longrightarrow \widehat{T}$ le dg-foncteur de Yoneda, qui est un dg-foncteur pleinement fidèle. On note $[T] := H^0(T)$ la catégorie homotopique de T. Comme T est triangulée, $[T]$ est munie d'une structure triangulée naturelle pour laquelle les triangles distingués sont les images des suites exactes de fibrations (voir [Ho, §7] ou [To3, §4.4]). D'après nos conventions $[T]$ est aussi Karoubienne. De la même manière, $[\widehat{T}]$ est une catégorie triangulée qui possède des sommes infinies. Le plongement de Yoneda induit un foncteur triangulé pleinement fidèle

$$[T] \hookrightarrow [\widehat{T}].$$

Le caractère triangulé de T implique que l'image essentielle de ce plongement est la sous-catégorie pleine des objets compacts dans $[\widehat{T}]$. On dipose donc d'une équivalence triangulée naturelle

$$[T] \simeq [\widehat{T}]_c.$$

Définition 3.1. *Une* t-structure sur T *est la donnée d'une t-structure sur la catégorie triangulée* $[\widehat{T}]$ *au sens de* [BBD]*. Le* cœur *d'une t-structure sur* T *est par définition le cœur de la t-structure correspondante sur* $[\widehat{T}]$*. Il sera noté* $\widehat{\mathcal{H}}$*.*

Par définition, une t-structure sur T est complètement caractérisée par la donnée d'une sous-catégorie pleine $[\widehat{T}]^{\leq 0} \subset [\widehat{T}]$, formée des objets x tels que $\tau_{>0}x \simeq 0$. Inversement, une telle sous-catégorie pleine de $[\widehat{T}]$ détermine une t-structure si et seulement si elle est stable par sommes (possiblement infinies), cônes et facteurs directs, et si de plus elle est engendrée par cônes, sommes et facteurs directs par un ensemble petit d'objets (voir [Ke-Vo]). Par la suite, nous supposerons implicitement que les t-structures considérées satisferont toutes cette hypothèses ensemblistes: $[\widehat{T}]^{\leq 0}$ est engendrée, par cônes, sommes et facteurs directs par un ensemble petit d'objets.

Comme l'ensemble des classes d'équivalence de sous-catégories pleines de $[\widehat{T}]$ sont en correspondance bi-univoque avec celui des sous-dg-catégories pleine de $\widehat{T}$, on voit qu'une t-structure sur T consiste en la donnée d'une sous-dg-catégorie pleine $\widehat{T}^{\leq 0} \subset \widehat{T}$ qui est stable, à équivalence près, par colimites (au sens des dg-catégorie) et qui est engendrée par colimites par un ensemble petit d'objets. Il est important de noter cependant que bien que l'inclusion naturelle $[\widehat{T}]^{\leq 0} \subset [\widehat{T}]$ soit induite par un dg-foncteur pleinement fidèle $\widehat{T}^{\leq 0} \subset \widehat{T}$, le foncteur de troncation

$$\tau_{\leq 0} : [\widehat{T}] \longrightarrow [\widehat{T}]^{\leq 0}$$

ne l'est pas (car il n'est pas un foncteur triangulé). Ce foncteur de troncation peut cependant être représenté par un ∞-foncteur sur les ∞-catégories correspondantes

$$|\widehat{T}| \longrightarrow |\widehat{T}^{\leq 0}|$$

(où $|-|$ désigne le foncteur qui à une dg-catégorie associe l'∞-catégorie correspondante, en appliquant par exemple la construction de Dold-Kan aux complexes de morphismes, voir par exemple [Ta3]).

Fixons maintenant une dg-catégorie T triangulée sur k munie d'une t-structure. Nous noterons $\widehat{T}^{\leq 0}, \widehat{T}^{\geq 0} \subset \widehat{T}$ les sous-dg-catégories pleines formées des objets négatifs, respectivement positifs, par rapport à la t-structure. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\widehat{T}^{\leq n} \subset \widehat{T}$ la sous-dg-catégorie pleine formée des objets x tels que $\tau_{>0}(x[n]) \simeq 0$. De même, $\widehat{T}^{\geq n}$ est définie comme la sous-dg-catégorie pleine formée des x tels que $\tau_{<0}(x[n]) \simeq 0$. On pose, pour toute paire d'entiers $a \leq b$

$$\widehat{T}^{[a,b]} := \widehat{T}^{\leq b} \cap \widehat{T}^{\geq a} \subset \widehat{T}.$$

Notons que $\widehat{T}^{[0,0]}$ est une sous-dg-catégorie pleine de $\widehat{T}$ dont la catégorie homotopique s'identifie naturellement au cœur de la t-structure. De plus, pour deux objets $x, y \in \widehat{T}^{[0,0]}$ les complexes de morphismes $T(x,y)$ sont cohomologiquement concentrés en degrés positifs. On voit ainsi que $[\widehat{T}^{[0,0]}]$, qui est une catégorie abélienne k-linéaire, est munie d'une dg-foncteur naturel

$$[\widehat{T}^{[0,0]}] \longrightarrow \widehat{T}^{[0,0]}$$

induisant une équivalence sur les catégorie homotopiques. En composant avec l'inclusion naturelle on trouve un dg-foncteur

$$[\widehat{T}^{[0,0]}] \longrightarrow \widehat{T}.$$

Ce dg-foncteur n'est pas pleinement fidèle, mais induit un foncteur pleinement fidèle

$$[\widehat{T}^{[0,0]}] \hookrightarrow [\widehat{T}]$$

qui identifie $[\widehat{T}^{[0,0]}]$ au cœur. De cette manière, le cœur de la t-structure $\widehat{\mathcal{H}}$ sera considéré comme sous-catégorie pleine de $[\widehat{T}]$, mais aussi comme sous-dg-catégorie (non-pleine) de $\widehat{T}$.

Nous introduisons les notions de finitudes suivantes pour une t-structure sur T.

Définition 3.2. *Soit T une dg-catégorie triangulée sur k munie d'une t-structure.*

1. *Nous dirons que la t-structure est* bornée *si tous les objets compacts de $[\widehat{T}]$ sont bornés: pour tout $E \in [T] \simeq [\widehat{T}]_c$ il existe $a \leq b$ tels que $E \in \widehat{T}^{[a,b]}$.*
2. *Nous dirons que la t-structure est* précompacte *si pour tout $E \in [T]$, les objets $\tau_{\leq 0}(E)$ et $\tau_{\geq 0}(E)$ sont compacts dans $[\widehat{T}]$.*
3. *Nous dirons que la t-structure est* compacte *si elle est bornée, précompacte et si de plus la sous-dg-catégorie pleine $\widehat{T}^{\geq 0} \subset \widehat{T}$ est stable par colimites filtrantes.*

Les t-structures compactes définies ci-dessus possèdent des propriétés de stabilité remarquables que nous avons rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit T une dg-catégorie triangulée munie d'une t-structure compacte. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) *Pour toute paire d'entiers $a \leq b$, la sous-dg-catégorie $\widehat{T}^{[a,b]} \subset \widehat{T}$ est stable par colimites filtrantes. Les ∞-foncteurs de cohomologie $H^i_t : |\widehat{T}| \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}$ commutent aux colimites filtrantes.*
(2) *Pour tout $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, la sous-dg-catégorie pleine $\widehat{T}^{[a,b]} \subset \widehat{T}$ est engendrée par colimites par les objets de $T \cap \widehat{T}^{[a,b]}$.*
(3) *La t-structure sur $[\widehat{T}]$ se restreint en une t-structure sur la sous-catégorie des objets compacts $[T]$. Le cœur $\mathcal{H}$ de cette t-structure induite est $\widehat{\mathcal{H}} \cap [T] \subset [\widehat{T}]$, l'intersection du cœur de la t-structure sur $[\widehat{T}]$ avec la sous-catégorie des objets compacts.*
(4) *La sous-catégorie des objets ω-petits de la catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{H}}$ est $\mathcal{H} = \widehat{\mathcal{H}} \cap [T]$.*
(5) *Un objet $E \in \widehat{T}$ est compact si et seulement s'il existe deux entiers $a \leq b$ avec $E \in \widehat{T}^{[a,b]}$ et de plus $H^i_t(E) \in \widehat{\mathcal{H}}$ est un objet de $\mathcal{H}$.*

Preuve: (1) Pour commencer, notons $|\widehat{T}|$ l'∞-catégorie associée à la dg-catégorie $\widehat{T}$. Par définition de t-structure compacte la sous-∞-catégorie pleine $|\widehat{T}^{\geq 0}| \hookrightarrow |\widehat{T}|$ est stable by colimites filtrantes. Comme l'∞-foncteur de troncation $\tau_{\geq 0}$ est un adjoint à gauche, il commute aux colimites filtrantes. En utilisant le triangle distingué d'∞-foncteurs

$$\tau_{\leq -1} \longrightarrow id \longrightarrow \tau_{\geq 0}$$

on voit que $\tau_{\leq -1}$ commute aussi aux colimites filtrantes. Cela implique que pour tout $a \leq b$ les ∞-foncteurs $\tau_{[a,b]}$ commutent aux colimites fitrantes, et donc que les sous ∞-catégories pleines $|\widehat{T}^{[a,b]}| \hookrightarrow |\widehat{T}|$ sont stables par colimites filtrantes.

(2) Soit $x \in \widehat{T}^{[a,b]}$. On écrit $x \simeq \mathrm{colim}_\alpha\, x_\alpha$, une colimite filtrante d'objets $x_\alpha \in T$. Par (1) on a $x \simeq \tau_{[a,b]}(x) \simeq \mathrm{colim}_\alpha\, \tau_{[a,b]}(x_\alpha)$. Or, par hypothèse de compacité de la t-structure, tous les $\tau_{[a,b]}(x_\alpha)$ sont dans T, et donc dans $T \cap \widehat{T}^{[a,b]}$.

(3) C'est une conséquence directe de la condition de compacité sur la t-structure.

(4) Tout d'abord, comme les objets de $\mathcal{H}$ sont compacts dans $\widehat{T}$, ils sont aussi ω-petits dans $\widehat{\mathcal{H}}$ (car (1) implique que les colimites filtrantes dans $\widehat{\mathcal{H}}$ sont aussi des colimites filtrantes dans $\widehat{T}$). Inversement, soit x un objet ω-petit de $\widehat{\mathcal{H}}$. On voit x dans $\widehat{T}$ et on écrit x comme une colimite filtrante $x \simeq \mathrm{colim}_\alpha\, x_\alpha$ avec $x_\alpha \in T \cap \widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ (ce qui est possible à l'aide de (2)). Tous les objets x et x_α étant ω-petits dans $\widehat{\mathcal{H}}$ on voit que x est un rétracte d'un x_α. Mais $T \cap \mathcal{H} = \widehat{\mathcal{H}}$ est stable par facteurs directs dans $\widehat{T}$, et donc $x \in \mathcal{H}$.

(5) Se déduit par dévissage des points précédents. □

Soit maintenant A une k-algèbre commutative et considérons $T_A := T \widehat{\otimes}_k A$ la dg-catégorie triangulée A-linéaire induite par changement de base. La construction $A \mapsto T_A$ se promeut en un ∞-foncteur de la catégorie des k-algèbres commutatives vers celle des dg-catégories triangulées (voir [To4, §3.1]). De manière explicite, T_A peut-être définie, à équivalence naturelle près, comme la sous-dg-catégorie pleine des $(T \otimes_k A)^{op}$-dg-modules, formée des dg-modules cofibrants et quasi-représentables (voir [To-Va1]). On peut aussi voir T_A par la formule suivante

$$T_A \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(A, T),$$

où A est considérée comme une dg-catégorie sur k avec un unique objet. La dg-catégorie $\widehat{T_A}$ s'identifie naturellement à $\widehat{T}_A = \mathbb{R}\underline{Hom}(A, \widehat{T})$ ainsi qu'à la dg-catégorie des $(T \otimes_k A)^{op}$-dg-modules cofibrants.

Nous renvoyons à [To4] pour plus de détails sur les changements d'anneaux de base pour les dg-catégories.

On définit une t-structure sur $\widehat{T}_A$ induite par celle de T de la manière suivante. On dispose d'un unique dg-foncteur $k \longrightarrow A$ induit par l'identité dans A. Cela définit un dg-foncteur de restriction $\mathbb{R}\underline{Hom}(A, \widehat{T}) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(k, \widehat{T}) \simeq \widehat{T}$, et donc un dg-foncteur, que nous appellerons *oubli*

$$\widehat{T}_A \longrightarrow \widehat{T}.$$

On définit $\widehat{T}_A^{\geq 0}$ par la carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} \widehat{T}_A^{\geq 0} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{T}_A \arrow[d] \\ \widehat{T}^{\geq 0} \arrow[r] & \widehat{T}. \end{tikzcd}$$

Le dg-foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche (au sens des dg-catégories, voir [To4])

$$- \otimes_k A : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T}_A,$$

qui en termes de dg-modules envoie un T^{op}-dg-module E sur $E \otimes_k A$ muni de sa structure naturelle de $T^{op} \otimes_k A$-dg-module. On en déduit un adjoint à gauche au foncteur d'oubli sur les catégories triangulées associées, que nous appellerons *changement de base*

$$- \otimes_k A : [\widehat{T}] \longrightarrow [\widehat{T}_A].$$

On définit alors $\widehat{T}_A^{\leq 0}$ comme étant la plus petite sous-dg-catégorie pleine de $\widehat{T}_A$ qui est stable par sommes, cônes et rétractes, et qui contient l'image de $\widehat{T}^{\leq 0}$ par le dg-foncteur $- \otimes_k A$.

La paire de sous-catégories de $[\widehat{T}_A]$

$$[\widehat{T}_A]^{\leq 0} := [\widehat{T}_A^{\leq 0}] \qquad [\widehat{T}_A]^{\geq 0} := [\widehat{T}_A^{\geq 0}]$$

définit une t-structure sur $\widehat{T}_A$. Pour cette t-structure, l'adjonction de foncteurs triangulés

$$- \otimes_k A : [\widehat{T}] \longleftrightarrow [\widehat{T}_A]$$

est compatible avec les t-structures au sens où $- \otimes_k A$ est t-exact à droite, et son adjoint à droite t-exact à gauche.

Définition 3.4. *Avec les notations ci-dessus, la t-structure sur $\widehat{T}_A$ est appelée la* t-structures induite par extension des scalaires.

Le lemme suivant se déduit aisément des définitions et du fait que le foncteur d'oubli $[\widehat{T}_A] \longrightarrow [\widehat{T}]$ commute avec les sommes arbitraires.

Lemme 3.5. *Avec les notations ci-dessus, pour toute dg-catégorie triangulée T munie d'une t-structure, et toute k-algèbre commutative A, le foncteur d'oubli*

$$p : [\widehat{T}_A] \longrightarrow [\widehat{T}]$$

est t-exact pour la t-structure sur $\widehat{T}_A$ induite par extension des scalaires. De plus, ce foncteur reflête la t-structure sur $[\widehat{T}_A]$: pour tout objet $x \in [\widehat{T}_A]$ on a

$$(p(x) \in [\widehat{T}]^{\leq 0}) \Longleftrightarrow (x \in [\widehat{T}_A]^{\leq 0}) \qquad (p(x) \in [\widehat{T}]^{\geq 0}) \Longleftrightarrow (x \in [\widehat{T}_A]^{\geq 0}).$$

Preuve: Il suffit de démontrer les deux équivalences. La seconde équivalence est vraie par définition de $[\widehat{T}_A]^{\geq 0}$ comme image réciproque de $[\widehat{T}]^{\geq 0}$ par p. Soit $x \in \widehat{T}_A^{\leq 0}$. C'est une colimite dans $\widehat{T}_A$ d'objets de la forme $x_\alpha \otimes A$, avec $x_\alpha \in \widehat{T}^{\leq 0}$. Comme le dg-foncteur p commute aux colimites arbitraires, $p(x)$ est une colimite d'objets de la forme $x_\alpha \otimes_k A$, qui eux même sont des sommes de x_α. On voit donc que $p(x) \in \widehat{T}^{\leq 0}$. Inversement, supposons que $p(x) \in \widehat{T}^{\leq 0}$. A l'aide de l'adjonction $(\otimes_k A, p)$, on construit un objet simplicial $R_*(x)$ dans $\widehat{T}_A$ muni d'une augmentation $R_*(x) \longrightarrow x$ avec $R_n(x) \simeq q^n(x) \simeq p(x) \otimes_k A^{\otimes n+1}$ pour tout $n \geq 0$, avec q l'endomorphisme de $\widehat{T}_A$ donné par $p(-) \otimes_k A$. Cet objet est une résolution de x au sens où l'augmentation induit une équivalence dans $\widehat{T}_A$

$$\operatorname*{colim}_{n \in \Delta^{op}} R_n(x) \simeq x$$

Par hypothèse et par définition chaque $R_n(x)$ est dans $\widehat{T}_A^{\leq 0}$, et ainsi $x \in \widehat{T}_A^{\leq 0}$. $\square$

Ce lemme, associé au fait que $\widehat{T}_A$ est la dg-catégorie des A-modules dans $\widehat{T}$, montre que le cœur de la t-structure induite sur $\widehat{T}_A$ n'est autre que la catégorie des A-module dans la catégorie abélienne k-linéaire $\widehat{\mathcal{H}}$. En d'autre termes, le cœur de $\widehat{T}_A$ s'identifie à la catégorie abélienne A-linéaire obtenue à partir de $\widehat{\mathcal{H}}$ par extension des scalaires de k à A.

Nous arrivons aux notions principales de cette section, la notion de *t-structure ouverte* et de *t-structure parfaite* sur une dg-catégorie saturée T. Ces notions font intervenir les t-structures induites sur $\widehat{T}_A$ et ne semblent pas facilement exprimables en terme de T seule.

Commençons par la notion de t-structure ouverte. Pour toute paire d'entiers $a \leq b$ nous définissons $\mathcal{M}_T^{[a,b]} \subset \mathcal{M}_T$ un sous-préchamp de $\mathcal{M}_T$ comme suit. Soit A une k-algèbre commutative, rappelons que l'ensemble simplicial $\mathcal{M}_T(A)$ est le nerf de la catégorie des $T^{op} \otimes_k A$-dg-modules cofibrants et compact et des quasi-isomorphismes entre iceux (voir [To-Va1]). Par définition, $\mathcal{M}_T^{[a,b]}(A) \subset \mathcal{M}_T(A)$ est le sous-ensemble simplicial plein (i.e. réunion de composantes connexes) formé des dg-modules E satisfaisant la condition suivante: pour tout A-algèbre commutative A', on a

$$E \otimes_A A' \in [\widehat{T}_{A'}]^{[a,b]}.$$

Par définition, un objet $E \in \mathcal{M}_T^{[a,b]}(A)$ sera dit *d'amplitude contenu dans l'intervalle* $[a, b]$, ou encore *d'amplitude* $[a, b]$.

Le lemme suivant montre que la condition d'être d'amplitude dans l'intervalle $[a, b]$ est une condition locale pour la topologie étale.

Lemme 3.6. *Le préchamp $\mathcal{M}_T^{[a,b]}$ est un champ pour la topologie étale.*

Preuve: On commence par remarquer le fait suivant. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme plat de k-algèbres commutatives de type fini. Alors le dg-foncteur de changement de base

$$\widehat{T}_A \longrightarrow \widehat{T}_B$$

est t-exact. En effet, sans hypothèse de platitude et simplement par définition, ce dg-foncteur est t-exact à droite. Par ailleurs, pour $x \in \widehat{T}_A$, si on note $p : \widehat{T}_B \longrightarrow \widehat{T}_A$ le dg-foncteur d'oubli, on trouve $p(x \otimes_A B) \simeq x \otimes_A B$. Comme B est un A-module plat, il est colimite filtrante de A-modules projectifs, et ainsi $p(x \otimes_A B)$ est une colimite filtrante d'objets de la formes $x \otimes_A M$ avec M un A-module projectif. Mais un tel $x \otimes_A M$ est un rétracte d'une somme de x. Ainsi, on voit que $p(x \otimes_A B)$ est dans la sous-dg-catégorie pleine de $\widehat{T}_A$ engendrée par colimites filtrantes par x. Ainsi, si $x \in \widehat{T}_A^{\geq 0}$ il en est de même de $p(x \otimes_A B)$.

Soit maintenant $A \longrightarrow B$ un morphisme fidèlement plat entre k-algèbres commutatives de type fini. On note B^* la k-algèbre commutative co-simpliciale co-nerf du morphisme $A \longrightarrow B$, de sorte que $B^n = B^{\otimes_A n+1}$. On dipose d'une co-augmentation $A \longrightarrow B^*$. Il faut montrer que le morphisme naturel

$$\mathcal{M}_T^{[a,b]}(A) \longrightarrow \lim_{n \in \Delta} \mathcal{M}_T^{[a,b]}(B^n)$$

est une équivalence. Comme $\mathcal{M}_T^{[a,b]}$ est un sous-préchamp plein du champ $\mathcal{M}_T$, ce morphisme est équivalent à une réunion de composantes connexes. Il reste à montrer que si un objet t-plat $x \in T_A$ est tel que $x \otimes_A B \in T_B^{[a,b]}$ alors $x \in T_A^{[a,b]}$. Mais comme $A \mapsto T_A$ est un champ en dg-catégories (voir [To4]), on a une équivalence dans T_A

$$x \simeq \lim_{n \in \Delta} x \otimes_A B^n.$$

Chaque B^n est un A-module plat, et donc colimite filtrante de A-module projectifs. Ainsi, chaque $x \otimes_A B^n$ est un facteur d'une somme de x et est donc dans $\widehat{T}_A^{[a,b]}$. Comme $\widehat{T}_A^{\geq a}$ est stable par limites dans $\widehat{T}_A$ il s'en suit que $x \in T_A^{\geq a}$.

Par ailleurs, pour montrer que $x \in T_A^{\leq b}$, il faut montrer que pour tout $y \in \widehat{T}_A^{>b}$ le complexe de A-modules $\widehat{T}_A(x,y)$ est cohomologiquement concentré en degrés strictement positifs. Comme $A \longrightarrow B$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que $\widehat{T}_A(x,y) \otimes_A B$ est cohomologiquement concentré en degrés strictement positifs. Or x est compact, et on a donc un quasi-isomorphisme naturel

$$\widehat{T}_A(x,y) \otimes_A B \simeq \widehat{T}_B(x \otimes_A B, y \otimes_A B).$$

Comme nous avons vu que $\otimes_A B$ est t-exact, on a $y \otimes_A B \in \widehat{T}_B^{>b}$, et donc $H^i(\widehat{T}_B(x \otimes_A B, y \otimes_A B)) = 0$ pour $i \leq 0$. Ceci implique que $x \in \widehat{T}_A^{\leq b}$ et termine la preuve du lemme. $\square$

Définition 3.7. *Soit T une dg-catégorie saturée. Nous dirons qu'une t-structure sur T est* ouverte *si elle vérifie la condition suivante: pour toute paire d'entiers $a \leq b$, le sous-champ*

$$\mathcal{M}_T^{[a,b]} \subset \mathcal{M}_T$$

est représentable par une immersion ouverte.

On peut interpréter la définition ci-dessus comme une tentative pour s'assurer d'une forme de semi-continuité des foncteurs H_t^i, analogue à la semi-continuité de la dimension des groupes de cohomologie des complexes parfaits de Grothendieck.

Si une dg-catégorie saturée T est munie d'une t-structure ouverte, alors pour tout $a \leq b$, les champs $\mathcal{M}_T^{[a,b]}$ sont localement algébriques et localement de présentation finie. Par ailleurs, si $n = b-a+1$, on voit facilement que $\mathcal{M}_T^{[a,b]}$ est un n-champ d'Artin localement de présentation finie sur k. Ainsi, pour $a = b = 0$ on trouve un 1-champ d'Artin $\mathcal{M}_T^{[0,0]}$ qui classifie les objets compacts du cœur de T. Ce champ sera noté $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$, et est un champ de modules d'objets dans la catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{H}}$. Il peut être décrit de la manière suivante. Pour A une k-algèbre commutative notons $\widehat{\mathcal{H}}_A$ la catégorie abélienne des A-modules dans la catégorie k-linéaire $\widehat{\mathcal{H}}$. L'association $A \mapsto \widehat{\mathcal{H}}_A$ définit un champ en catégories sur le site des k-schémas affines muni de la topologie étale. Le champ $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ en est le sous-champ en groupoïdes formé des objets $E \in \widehat{\mathcal{H}}_A$ qui vérifient les deux conditions suivantes.

(1) L'objet E est *t-plat*: pour tout morphisme de k-algèbres de type fini $A \longrightarrow A'$, l'objet $E \otimes_A A' \in \widehat{T}_{A'}$ est dans le cœur de la t-structure induite sur $\widehat{T}_{A'}$.
(2) L'objet E est compact dans $[\widehat{T}_A]$.

Notons que le champ $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ dépend à priori de strictement plus que de la catégorie abélienne, car la condition de compacité précédente fait intervenir le plongement $\widehat{\mathcal{H}}_A \hookrightarrow [\widehat{T}_A]$ qui dépend à priori du choix de T.

Venons-en à notre seconde notion, celle de t-structure parfaite.

Définition 3.8. *Soit T une dg-catégorie triangulée munie d'une t-structure. Nous dirons que la t-structure est* parfaite *si pour toute k-algèbre A régulière les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) *La t-structure induite sur la dg-catégorie triangulée $T_A = T \widehat{\otimes}_k A$ par extension des scalaires est une t-structure compacte.*
(2) *Le cœur $\widehat{\mathcal{H}}_A$ de la t-structure induite est une catégorie abélienne noethérienne: tout sous-objet d'un objet ω-petit est ω-petit.*

4. Espaces Quot

Nous avons vu la notion de t-structure ouverte sur une dg-catégorie saturée T. Nous allons voir dans ce paragraphe comment cette notion permet de définir des généralisation des schémas Quot de Grothendieck pour des objets de $\mathcal{H}$. Ces espaces Quot seront utilisés de manière essentielle dans la suite de ce travail pour aboutir à notre théorème principal, mais cette notion possède aussi un intérêt en soi.

Soit donc T une dg-catégorie saturée sur k munie d'une t-structure parfaite et ouverte (voir les définitions 3.7 et 3.8). Soit A une k-algèbre commutative de type fini. On note $\mathcal{H}_A$ l'intersection du cœur de la t-structure induite sur $[\widehat{T}_A]$ avec $[T_A]$ la sous-catégories des objets compacts. Rappelons qu'un objet E de $\widehat{\mathcal{H}}_A$ est dans $\mathcal{H}_A$ si et seulement si pour tout objet compact $K \in T$, le complexe $T(K, E)$ est un complexe parfait de A-modules (prop. 3.3 et le fait que T soit saturée). On suppose que E est t-plat: pour tout morphisme de k-algèbres commutatives de type fini $A \longrightarrow A'$ l'objet $E \otimes_A A' \in [\widehat{T}_{A'}]$ est dans le cœur de la t-structure induite sur $[\widehat{T}_{A'}]$.

Comme dans [To-Va1], on notera $\mathcal{M}_T^{(1)}$ le champ des morphismes dans T, classifiant les morphismes de T^{op}-dg-modules parfaits. Il vient avec deux projections

$$\mathcal{M}_T \xleftarrow{s} \mathcal{M}_T^{(1)} \xrightarrow{t} \mathcal{M}_T,$$

de *source* et *but*. La condition de platitude imposée sur E définit un morphisme de champs

$$E : Spec\, A \longrightarrow \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}_T.$$

On considère le champ $\mathcal{M}_T^{/E}$, défini par le produit fibré ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_T^{/E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_T^{(1)} \arrow[d, "t"] \\ Spec\, A \arrow[r, "E"'] & \mathcal{M}_T. \end{tikzcd}$$

Le champ $\mathcal{M}_T^{/E}$ classifie les T^{op}-dg-modules compacts munis d'un morphisme vers E. Sa présentation par le produit fibré ci-dessus montre qu'il s'agit d'un champ localement algébrique et localement de type fini sur k. Le morphisme source définit un morphisme induit

$$s : \mathcal{M}_T^{/E} \longrightarrow \mathcal{M}_T.$$

Nous noterons $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}/E}$ le champ défini par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}/E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}} \arrow[d] \\ \mathcal{M}_T^{/E} \arrow[r, "s"'] & \mathcal{M}_T. \end{tikzcd}$$

Le champ $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}/E}$ est un 1-champ au-dessus de $Spec\, A$, dont les sections au-dessus d'une A-algèbre commutative de type finie A' est le groupoïde des couples (E', u), avec $E' \in \mathcal{H}_{A'}$ un objet t-plat, et u un morphisme $u : E' \longrightarrow E \otimes_A A'$ dans $\mathcal{H}_{A'}$. En utilisant l'algébricité de $\mathcal{M}_T^{(1)}$ et l'ouverture de la t-structure, il est facile de voir que $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}/E}$ est un 1-champ d'Artin, qui se réalise comme un sous-champ ouvert du champ localement algébrique $\mathcal{M}_T^{/E}$.

Enfin, soit $Quot(E)$ le sous-champ de $\mathcal{M}_T^{/E}$ formé des objets (E', u) comme ci-dessus vérifiant la condition suivante: le morphisme u est un monomorphisme dans la catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{H}}_{A'}$, et son conoyau est un objet $Coker(u) \in \widehat{\mathcal{H}}_{A'}$ qui est t-plat. En d'autre termes, $Quot(E)$ est le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} Quot(E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_T^{/E} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}} \arrow[r] & \mathcal{M}_T, \end{tikzcd}$$

où c est le morphisme qui envoie une paire (E', u) comme ci-dessus sur le cône de u.

Finalement, on fixe un générateur compact K de $\widehat{T}$, et une fonction $\nu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ à support fini. On note $\mathcal{M}_T^{\nu} \subset \mathcal{M}_T$ le sous-champ ouvert de type fini des T^{op}-dg-modules compacts F tels que (voir [To-Va1, §3.3])

$$dim_k H^i(T(K, E)) \leq \nu(i) \; \forall \; i \in \mathbb{Z}.$$

Nous noterons de même $Quot^{\nu}(E)$ le sous-champ ouvert de $Quot(E)$ formé des paires (E', u) dont le cône de u est dans $\mathcal{M}_T^{\nu}$. En d'autre termes, $Quot^{\nu}(E)$ est le produit fibré

$$\begin{tikzcd} Quot^{\nu}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_T^{/E} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}} \cap \mathcal{M}_T^{\nu} \arrow[r] & \mathcal{M}_T. \end{tikzcd}$$

Proposition 4.1. *Avec les hypothèses, notations et définitions ci-dessus, les deux assertions suivantes sont satisfaites.*

(1) *Le champ $Quot^{\nu}(E)$ est représentable par un espace algébrique de type fini et séparé sur $Spec\, A$.*
(2) *La projection $Quot(E) \longrightarrow S = Spec\, A$ vérifie le critère valuatif de propreté: pour toute k-algèbre commutative R intègre lisse et de dimension 1, de corps des fractions K, le morphisme*

$$Quot(E)(R) \longrightarrow Quot(E)(K) \times_{S(K)} S(R)$$

est une équivalence.

Preuve: (1) Les résultats de [To-Va1, §3.3] impliquent aisément que $Quot^{\nu}(E)$ est un espace algébrique de type fini au-dessus de $Spec\, A$. Comme $Quot^{\nu}(E)$ est un sous-champ ouvert de $Quot(E)$, sa séparation est une conséquence du critère valuatif de propreté que nous allons démontrer dans (2).

(2) On fibre le morphisme $Quot(E)(R) \longrightarrow Quot(E)(K) \times_{S(K)} S(R)$ au-dessus de $S(R)$, et on montre que qu'il est bijectif fibre à fibre. Cela implique que l'on peut remplacer A par R.

On dispose donc de (E', u) un objet de $Quot(E)(R)$, représenté comme une suite exacte d'objets t-plats dans $\mathcal{H}_R$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \xrightarrow{u} E' \longrightarrow 0.$$

On utilise l'adjonction de catégories abéliennes

$$- \otimes_R K : \widehat{\mathcal{H}}_R \leftrightarrows \widehat{\mathcal{H}}_K$$

induite par changement de base et son adjoint à droite le foncteur d'oubli. L'unité de l'ajonction induit un morphisme de suites exactes dans $\widehat{\mathcal{H}}_R$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \otimes_R K \arrow[r] & E \otimes_R K \arrow[r, "u_K"] & E' \otimes_R K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On commence par remarquer que les morphismes verticaux sont des monomorphismes. En effet, pour tout objet t-plat $E \in \widehat{\mathcal{H}}_R$, l'unité $v : E \longrightarrow E \otimes_R K$ est un monomorphisme. Pour voir cela, on considère le cône de v dans $\widehat{T}_R$, qui s'exprime comme $E \otimes_R K/R \simeq \mathrm{colim}_{f \in R-0} E/f$. Ici la colimite est prise sur l'ensemble filtrant des éléments non-nuls de R (ordonné par la relation de divisibilité), et E/f désigne le cône de la multiplication $\times f : E \to E$. Ce cône s'exprime aussi comme $E \otimes_R R/(f)$, et comme E est t-plat ce cône est dans $\mathcal{H}_R$. On en déduit que $\mathrm{colim}_{f \in R-0} E/f$, et donc $E \otimes_R K/R$ est dans $\widehat{\mathcal{H}}_R$, et ainsi que le morphisme v est un monomorphisme.

Le fait que les morphismes verticaux du diagramme précédent soient des monomorphismes implique que le carré

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ L \otimes_R K \arrow[r] & E \otimes_R K \end{tikzcd}$$

est cartésien dans la catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{H}}_R$ (attention, il ne l'est pas dans $\widehat{T}_R$). Cela implique clairement que (E, u') est l'unique relèvement de $(E' \otimes_R K, u \otimes_R K)$ de K à R. Ainsi, le morphisme $Quot(E)(R) \longrightarrow Quot(E)(K) \times_{S(K)} S(R)$ est injectif.

Soit maintenant (E'_K, u_K) un objet de $Quot(E)(K)$, représenté par une suite exacte dans $\mathcal{H}_K$

$$0 \longrightarrow L_K \longrightarrow E_K \xrightarrow{u_K} E'_K \longrightarrow 0.$$

On définit un sous-objet $L \subset E$ dans $\widehat{\mathcal{H}}_R$ par le carré cartésien (dans $\widehat{\mathcal{H}}_R$) suivant

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ L_K \arrow[r] & E \otimes_R K. \end{tikzcd}$$

Comme la t-structure est noethérienne L est un objet ω-petit et donc est dans $\mathcal{H}_R$. Par ailleurs, le quotient E/L dans $\mathcal{H}_R$ est par construction un sous-objet de $E' \otimes_K R \in \widehat{\mathcal{H}}_R$. Ceci implique que E/L est un objet sans torsion: pour tout $f \in R - 0$, le cône de la multiplication $\times f : E \longrightarrow E$ est dans $\mathcal{H}_R$. Ceci implique aisément que pour tout R-module M, l'objet $E \otimes_R M$ à priori dans $\widehat{T}_R$, reste dans $\widehat{\mathcal{H}}_R$. L'objet E/L est donc t-plat, et l'objet $(E/L, u)$, où $u : E \longrightarrow E/L$ est la projection naturelle est un relèvement de (E'_K, u_K) à un point de $Quot(E)(R)$. □

L'espace algébrique $Quot(E)$ contient deux copies du schéma $Spec\, A$, qui correspondent au couple (E', u) avec soit u un isomorphisme soit $E \simeq 0$. Cela définit deux morphismes

$$a, b : Spec\, A \rightrightarrows Quot(E),$$

de sorte que la projection $Quot(E) \longrightarrow Spec\, A$ en soit un rétracte. En particulier, comme $Quot(E)$ est séparé d'après la proposition 4.1, les morphismes a et b sont des immersions fermées. Ces deux morphismes sont aussi clairement des immersions ouvertes, car être nul est une condition ouverte pour les complexes parfaits (le morphisme $Spec\, k \longrightarrow \mathcal{M}_T$ correspondant à l'objet nul est une immersion ouverte). On trouve ainsi une décomposition canonique d'espaces algébriques au-dessus de $Spec\, A$

$$Quot(E) \simeq Spec\, A \coprod Quot^{\sharp}(E) \coprod Spec\, A,$$

avec $Quot^{\sharp}(E)$ l'ouvert des paires (E', u) qui sont telles que u n'est pas un isomorphisme et E' n'est pas nul.

La décomposition précédente et la proposition 4.1 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *Avec les notations précédentes, $Quot^{\sharp}(E)$ est un espace algébrique séparé localement de présentation finie sur $Spec\, A$, et la projection*

$$Quot^{\sharp}(E) \longrightarrow Spec\, A$$

vérifie de plus le critère valuatif de propreté.

5. Objets ponctuels et co-engendrement

On fixe T une dg-catégorie saturée sur k. Rappelons (voir section §1) que sur T on dispose de l'auto-équivalence de Serre

$$S_T : T \simeq T,$$

telle qu'il existe des quasi-isomorphismes fonctoriels

$$T(x,y)^{\vee} \simeq T(y, S(x)),$$

pout toute paire d'objets (x,y) dans T.

Définition 5.1. *Un* objet ponctuel de dimension $d \in \mathbb{N}$ dans T *est un objet $x \in T$ vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Pour tout $i < 0$ on a $H^i(T(x,x)) \simeq 0$.*
2. *La dg-algèbre $T(x,x)$ est quasi-isomorphe à $Sym_k(H^1(T(x,x))[-1])$.*
3. *$H^1(T(x,x))$ est un k-espace vectoriel de dimension d.*
4. *On a $S_T(x) \simeq x[d]$.*

Exemples. Deux exemples standards d'objets ponctuels. Si X est un espace algébrique propre et lisse de dimension d, le gratte-ciel en un point $k(x)$, vu comme objet de $L_{parf}(X)$ est un objet ponctuel de dimension d. Si A est une variété abélienne de dimension d, alors tout fibré en droites de degré 0 sur A est un objet ponctuel de dimension d.

Définition 5.2. *Un* système de points de dimension $d \in \mathbb{N}$ dans T *est la donnée d'un ensemble de classes d'équivalence d'objets $\mathcal{P}$ de T satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{P}$, x est un objet ponctuel de dimension d dans T.*
2. *Pour tout $x, y \in \mathcal{P}$, avec $x \neq y$, on a $T(x,y) \simeq 0$.*
3. *Un objet $E \in T$ est nul si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{P}$ on a $T(E,x) \simeq 0$.*

Un commentaire sur le point (3) de la définition précédente. Par dualité, $T(E,x) \simeq 0$ est équivalent à $T(E,x)^{\vee} \simeq T(S_T^{-1}(x), E) \simeq 0$. Or $T(S_T^{-1}(x), E) \simeq T(x,E)[-d]$ car x est ponctuel de dimension d. Ainsi, la condition (3) peut aussi s'exprimer par: E est nul si et seulement si $T(x,E) \simeq 0$. Cependant, les objets $x \in \mathcal{P}$ ne forment pas une famille de générateurs compacts de $\widehat{T}$, car il n'est pas vrai en général que $T(x,E) \simeq 0$ pour tout $x \in \mathcal{P}$ implique $E \simeq 0$ pour un objet quelconque de $\widehat{T}$.

Exemples. Pour revenir aux deux exemples précédents l'ensemble des gratte-ciel sur X forme un système de points de dimension d, et de même l'ensemble des fibrés en droites de degré zéro sur A.

Bien que les objets consituant un système de points dans une dg-catégorie saturée T ne forment pas des générateurs compacts, ils permettent de détecter les équivalences. Nous retiendrons le résultat bien connu suivant (voir par exemple [Or, Lem. 2.15]).

Lemme 5.3. *Soit $f : T \longrightarrow T'$ un dg-foncteur entre deux dg-catégories saturées. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux systèmes de points de même dimension d dans T et T'. On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) *Le dg-foncteur f envoie $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$ et de manière surjective.*
(2) *Le dg-foncteur f restreint aux objets de $\mathcal{P}$ est pleinement fidèle: pour tout $x, y \in \mathcal{P}$, le morphisme*
$$T(x,y) \longrightarrow T(f(x), f(y))$$
est un quasi-isomorphisme.

Alors f est une quasi-équivalence.

Preuve: On note f_* et $f_!$ les adjoints à droite et à gauche de $f : T \longrightarrow T'$ (voir [To4]). Il faut montrer que pour tout $z \in T$ et $z' \in T'$ les co-unités d'adjonction
$$f_!f(z) \longrightarrow z \qquad ff_*(z') \longrightarrow z'$$
sont des équivalences dans T et T'. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des systèmes de points dans T et T', il suffit de voir que pour tout $x \in \mathcal{P}$ et tout $x' \in \mathcal{P}$ les morphismes induits
$$T'(f_!f(z), x) \longrightarrow T(z, x) \qquad T(x', ff_*(z')) \longrightarrow T'(x', z')$$
sont des quasi-isomorphismes. Par adjonction, il faut vérifier que les unités d'adjonctions
$$x \longrightarrow f_*f(x) \qquad x' \longrightarrow ff_!(x')$$
sont des équivalences. Mais cela est induit par le fait que le dg-foncteur f induit une quasi-équivalence de la la sous-dg-catégorie pleine des objets de $\mathcal{P}$ dans T vers celle des objets de $\mathcal{P}'$ dans T'. $\square$

Les notions de système de points et de t-structure entrent en interaction à travers la notion de co-engendrement, résumée dans la définition suivante. Rappelons que si une t-structure sur T est parfaite elle induit une t-structure sur $[T]$, qui dispose d'un cœur $\mathcal{H}$. Ce cœur est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{H}}$ stable par sommes finies, rétractes, noyaux, conoyaux et extensions.

Définition 5.4. *Soit T une dg-catégorie saturée munie d'une t-structure parfaite et d'un système de points $\mathcal{P}$ de dimension d.*

(1) *Nous dirons que* le système $\mathcal{P}$ co-engendre la t-structure *si l'on a:*
$$(E \in T^{\leq 0}) \Longleftrightarrow (H^i(T(E,x)) \simeq 0 \; \forall \, x \in \mathcal{P}, \; \forall i < 0).$$
(2) *Nous dirons que* le système $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure *s'il co-engendre la t-structure et si de plus pour tout objet E du cœur $\mathcal{H}$ de la t-structure induite sur T, on a:*
$$(E \simeq 0) \Longleftrightarrow ([E,x] \simeq 0 \; \forall \, x \in \mathcal{P}).$$

Lorsqu'un système de points $\mathcal{P}$ co-engendre une t-structure parfaite, cette dernière est totalement caractérisée par la donnée de $\mathcal{P}$. En effet, par définition $\mathcal{P}$ détermine la partie négative $[T]^{\leq 0} = [T^{\leq 0}]$ de la t-structure induite sur $[T]$. On reconstruit alors $\widehat{T}^{\leq 0} \subset \widehat{T}$ comme étant la plus petite sous-dg-catégorie pleine contenant les objets de $T^{\leq 0}$ et qui est stable par sommes arbitraires et par cônes (voir prop. 3.3 (2)).

Lemme 5.5. *Soit T une dg-catégorie saturée munie d'une t-structure parfaite co-engendrée par un système de points $\mathcal{P}$ de dimension d.*

(1) *Tout objet $x \in \mathcal{P}$ appartient au cœur $\mathcal{H}$ de la t-structure induite sur $[T]$.*
(2) *Si le cœur $\mathcal{H}$ est une catégorie abélienne noethérienne, alors le système $\mathcal{P}$ engendre fortement la t-structure si et seulement si $\mathcal{P}$ coincide avec l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de $\mathcal{H}$.*

Preuve: (1) Soit $x \in \mathcal{P}$. Pour tout $y \in \mathcal{P}$ on a, par définition d'un système de points, $H^i(T(x,y)) \simeq 0$ pour $i < 0$. Ceci montre que $x \in [T]^{\leq 0}$. Soit maintenant $E \in [T]^{\leq -1}$, c'est à dire $E[-1] \in [T]^{\leq 0}$. Comme $\mathcal{P}$ co-engendre la t-structure on a $H^i(T(E[-1],x)) \simeq 0$ pour $i < 0$, ou en d'autres termes $H^i(T(E,x)) \simeq 0$ pour $i \leq 0$. Comme ceci est vrai pour tout $E \in [T]^{\leq -1}$ on a $x \in T^{\geq 0}$.

(2) Commençons par supposer que $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure. Soit $x \in \mathcal{P}$, et soit $x \twoheadrightarrow E$ un épimorphisme dans $\mathcal{H}$. Si $E \neq 0$, alors il existe $y \in \mathcal{P}$ et un morphisme non nul $E \to y$. On a forcément $x = y$, car le morphisme composée $x \to y$ est encore non-nul. Dans ce cas le morphisme composé $x \to x$ est un scalaire non-nul de k, et donc est un isomorphisme. Cela montre que $x \twoheadrightarrow E$ possède une section et donc que E est un facteur direct de x. Mais comme $End(x) \simeq k$ cela implique que $E \simeq 0$. Ainsi tous les éléments de x sont des objets simples de $\mathcal{H}$. De plus, si E est un objet simple de $\mathcal{H}$, il est non-nul et donc possède un morphisme non-nul $u : E \to x$ pour un $x \in \mathcal{P}$. On a déjà vu que x était simple, et ainsi le morphisme u et un isomorphisme. Cela montre que la classe d'isomorphisme de E appartient à $\mathcal{P}$.

Supposons réciproquement que $\mathcal{P}$ soit exactement l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{H}$. Soit $E \in \mathcal{H}$ un objet non-nul. Comme $\mathcal{H}$ est noethérienne, il existe un objet simple x de $\mathcal{H}$, et donc un élément de $\mathcal{P}$, avec un morphisme non-nul $E \to x$. Cela montre que $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure. □

Le point (2) du lemme précédent implique que lorsqu'une t-structure parfaite et à cœur noethérien est co-engendrée fortement par un système de points, le système $\mathcal{P}$ est lui-même detérminé par la t-structure comme étant l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de $\mathcal{H}$. Il revient ainsi au même, sous ces conditions, de se donner la t-structure ou de se donner le système de points $\mathcal{P}$.

Pour terminer, on introduit la notion de systèmes de points bornés.

Définition 5.6. *Un système de points $\mathcal{P}$ dans une dg-catégorie saturée T est* borné *s'il existe un sous-champ ouvert de type fini sur k $U \subset \mathcal{M}_T$ tel que $\mathcal{P}$ soit contenu dans le sous-ensemble*

$$\pi_0(U(k)) \subset \pi_0(\mathcal{M}_T(k)).$$

Rappelons d'après [To-Va1, §3.3] la caractérisation suivante des systèmes de points bornés. Un système de point $\mathcal{P}$ est borné si et seulement si pour tout générateur compact E de $\widehat{T}$ il existe une fonction $\nu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ à support fini, telle que

$$dim_k H^i(T(E,x)) \leq \nu(i)\ \forall\ i \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathcal{P}.$$

6. L'espace de modules des objets ponctuels

Pour cette section on fixe une dg-catégorie saturée T. On se fixe un système de points $\mathcal{P}$ de dimension d et une t-structure sur T. On suppose que les assertions suivantes sont satisfaites.

- La t-structure est parfaite et ouverte.
- Le famille de points $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure.

- La famille de points $\mathcal{P}$ est bornée.

Ces données permettent de définir $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, un sous-préchamp de $\mathcal{M}_T$ de la manière suivante. D'après la définition d'être une t-structure ouverte, on dispose d'un sous-champ ouvert $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}_T$ formé des objets d'amplitude 0 dans T. Pour une k-algèbre commutative de type finie A, on définit un sous-ensemble simplicial plein $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(A) \subset \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}(A)$, formé des objet $E \in T_A$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout morphisme d'anneaux $A \longrightarrow k$, l'objet $E \otimes_A k \in T$ est dans $\mathcal{P}$. Par définition de $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$, on sait que pour tout $A \longrightarrow k$ l'objet $E \otimes_A k$ vit dans le cœur $\mathcal{H}$. D'après le lemme 5.5, la condition précédente demande de plus que cet objet soit un objet simple de $\mathcal{H}$.

Nous avons défini $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(A)$ pour une k-algèbre de type finie. Nous étendons simplement cette définition à toutes les k-algèbres commutatives A en posant

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(A) := \operatorname*{colim}_{A_\alpha \subset A} \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(A_\alpha),$$

où la colimite est prise sur l'ensemble filtrant des sous-k-algèbres de type fini de A.

Le principal résultat de représentabilité est le suivant.

Théorème 6.1. *Le sous-préchamp $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est représentable par un* 1*-champ algébrique localement de type fini sur k. De plus, $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe au-dessus de son espace de modules grossier $M_{\mathcal{P}}$, et $M_{\mathcal{P}}$ est un espace algébrique lisse, séparé et de type fini sur k.*

Preuve: Commençons par la représentabilité de $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Le sous-préchamp $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ est clairement un sous-champ par définition. Nous allons montrer que l'inclusion $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ est représentable par une immersion ouverte. Pour cela, soit A une k-algèbre commutative et $E \in \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}(A)$. Soit U le sous-ensemble des points fermés s de $S = Spec\, A$ tels que $E_s := E \otimes_A k(s)$ soit un objet simple de $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{P}$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{H}$ il faut montrer que l'ensemble U est (l'ensemble des points fermés d') un ouvert Zariski du schéma S.

Notons $Z := S - U$ l'ensemble complémentaire, c'est à dire l'ensemble des points fermés s de S tels que E_s ne soit pas simple dans $\mathcal{H}$. Ainsi, l'ensemble Z est l'image (au niveau des points fermés) du morphisme $Quot^{\sharp}(E) \longrightarrow S$. Par la corollaire 4.2 cette image est stable par spécialisation. Par ailleurs, comme la système de points est borné, Z est aussi l'image de la projection $Quot^{\sharp,\nu}(E) \longrightarrow S$ pour une fonction $\nu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ à support fini et $Quot^{\sharp,\nu}(E) = Quot^{\sharp}(E) \cap Quot^{\nu}(E)$ est un ouvert quasi-compact de $Quot^{\sharp}(E)$. D'après la proposition 4.1 cette image est donc constructible. Ainsi, Z est constructible et stable par spécialisation, et est donc un fermé de S.

Ceci montre, comme annoncé, que l'inclusion $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ est représentable par une immersion ouverte. Comme $\mathcal{M}_T^{\mathcal{H}}$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe sur un espace algébrique de type fini il en est de même de $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Il nous reste à montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est un champ lisse, et que son espace de modules grossier est séparé.

Soit $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(k)$ un point global correspondant à un objet simple $x \in \mathcal{P}$. Nous allons ici considérer la version dérivée $\mathbb{R}\mathcal{M}_T$ du champ $\mathcal{M}_T$ (qui est noté $\mathcal{M}_T$ dans [To-Va1]). Le sous-champ ouvert $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}_T$ correspond à un sous-champ dérivé ouvert

$$\mathbb{R}\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}\mathcal{M}_T.$$

Le champ dérivé $\mathbb{R}\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est un 1-champ d'Artin dérivé dont le tronqué est le champ $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \simeq t_0(\mathbb{R}\mathcal{M}_{\mathcal{P}}).$$

Le point x définit un point global de $\mathbb{R}\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, au-quel on peut prendre le complexe tangent $\mathbb{T}_x$ (voir [To-Ve2]). Comme montré dans [To-Va1] on trouve un quasi-isomorphisme

$$\mathbb{T}_x[-1] \simeq T(x,x).$$

Par ailleurs, on sait que $\mathbb{T}_x[-1]$ se promeut en une dg-algèbre de Lie sur k (voir [To1, §4.3] et [Lu3]), et l'identification devient alors un identification de dg-algèbres de Lie où la structure de Lie sur le membre de droite est induite par le commutateur dans la dg-algèbre $T(x,x)$. Par définition des objets ponctuels, la dg-algèbre de Lie $T(x,x)$ est quasi-isomorphe à $Sym_k(V[-1])$, avec crochet et différentielle nulle, et $V = H^1(T(x,x))$. D'après la correspondence entre champs dérivés formels et dg-algèbres de Lie de [Lu3], le complété formel de $\mathbb{R}\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ en x s'écrit comme un produit de champs dérivés formels

$$B\hat{\mathbb{G}}_m \times \widehat{\mathbb{A}}^d \times F.$$

Le facteur F correspond à la dg-lie abélienne $Sym^{\geq 2}(V[-1])$, concentrée en degrés supérieurs à 2. Ainsi, on a $t_0(F) \simeq Spec\, k$. Ceci montre que le complété formel du tronqué $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ en x est équivalent à $B\hat{\mathbb{G}}_m \times \widehat{\mathbb{A}}^d$. On voit ainsi que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est lisse en x, et ce pour tout x.

Pour terminer la preuve du théorème, il nous reste à voir que l'espace de modules grossier de $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ est un espace algébrique séparé. Notons $M_{\mathcal{P}}$ cet espace de modules grossier. C'est un espace algébrique lisse et de présentation finie sur k. Pour montrer que $M_{\mathcal{P}}$ est séparé il suffit de montrer que pour toute k-algèbre A de valuation discrète, que l'on peut supposer de plus complète, le morphisme $M_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow M_{\mathcal{P}}(K)$ est injectif (où K est le corps des fractions de A). Soient x et y deux éléments de $M_{\mathcal{P}}(A)$ d'images égales dans $M_{\mathcal{P}}(K)$. Comme A est strictement hensélien les points x et y se relèvent en deux éléments x' et y' dans $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(A)$. Dans ce cas, x' et y' correspondent à deux objets $E, F \in \mathcal{H}_A$ qui sont t-plats et dont les changés de base $E \otimes_A K$ et $F \otimes_A K$ sont isomorphes dans $\mathcal{H}_K$. Il faut montrer que E et F sont isomorphes dans $\mathcal{H}_A$.

Soit $\phi_K : E \otimes_A K \simeq F \otimes_A K$ un isomorphisme dans $\mathcal{H}_K$. Par adjonction ceci correspond à un morphisme dans $\widehat{\mathcal{H}}_A$

$$\phi : E \longrightarrow F \otimes_A K \simeq \mathrm{colim}(\ F \xrightarrow{\pi} F \xrightarrow{\pi} \dots ,\ )$$

où $\pi \in A$ est une uniformisante. Comme E est de présentation finie dans $\widehat{\mathcal{H}}_A$ le morphisme ci-dessus se factorise par un des facteurs de la colimite. En d'autre termes, il existe un morphisme $\phi_A : E \longrightarrow F$ dans $\mathcal{H}_A$ tel que le morphisme induit par changement de base à K soit $\pi^n.\phi_K$ pour un certain n. Quitte à remplacer ϕ_K par $\pi^n.\phi_K$ on supposera donc que l'isomorphisme ϕ_K provient par changement de base d'un morphisme dans $\mathcal{H}_A$

$$\phi_A : E \longrightarrow F.$$

Comme $T_A(E,F)$ est un complexe parfait de A-modules et que $A \simeq \lim_n A/\pi^n$ est complet, on a

$$T_A(E,F) \simeq \lim_n T_A(E,F)/\pi^n \simeq \lim_n T_A(E,F/\pi^n),$$

où K/π^n est le cône du morphisme $\times \pi^n : K \longrightarrow K$. Comme les complexes $T_A(E,F/\pi^n)$ sont tous cohomologiquement concentrés en degrés positifs on trouve un isomorphisme naturel sur leurs H^0

$$Hom_{\mathcal{H}_A}(E,F) \simeq \lim_n Hom_{\mathcal{H}_A}(E,F/\pi^n).$$

Le morphisme ϕ_A est non nul, il existe donc un entier n tel que le morphisme induit $E \xrightarrow{\phi_A} F \longrightarrow F/\pi^n$ soit aussi non-nul. Soit n le plus petit entier tel que le morphisme ci-dessus soit non nul, de sorte que l'on ait $\phi_A = \pi^{n-1}.\psi_A$, avec $\psi_A : E \longrightarrow F$ un morphisme tel que le morphisme induit sur le corps résiduel $\psi_k := \psi_A \otimes_A k : E \otimes_A k \longrightarrow F \otimes_A k$ soit un morphisme non nul de $\mathcal{H}$. Comme les objets $E \otimes_A k$ et $F \otimes_A k$ sont supposés simples, le morphisme ψ_k est un isomorphisme. Enfin, comme E et F sont des $T^{op} \otimes_k A$ dg-modules compacts, ils sont parfaits comme A-dg-modules. Ainsi, le morphisme $\psi_A : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme par Nakayama pour les complexes parfaits. Ceci termine de démontrer que E et F sont isomorphes dans $\mathcal{H}_A$ et donc termine la preuve du théorème 6.1. □

7. Théorème de reconstruction

Pour une dg-catégorie saturée T, on dispose du champ $\mathcal{M}_T$ des objets de T, ainsi que d'un dg-foncteur canonique

$$\phi : T^{op} \longrightarrow L_{parf}(\mathcal{M}_T),$$

de la dg-catégorie opposée à celle de T vers celle des complexes parfaits sur le champs $\mathcal{M}_T$. Le morphisme ϕ est par définition celui correspondant au T^{op}-dg-module universel sur $\mathcal{M}_T$. Pour un objet $x \in T$, le complexe parfait $\phi(x)$ sur $\mathcal{M}_T$ peut être décrit de la manière suivante. Soit $u : Spec\, A \longrightarrow \mathcal{M}_T$ un morphisme correspondant à un $T^{op} \otimes_k A$-dg-module parfait E, que l'on voit comme un dg-foncteur $E : T^{op} \longrightarrow L_{parf}(A)$. Par définition, on dispose d'un identification naturelle de complexes parfaits de A-modules

$$E(x) \simeq u^*(\phi(x)).$$

L'identification ci-dessus peut aussi s'écrire

$$T(x, E) \simeq u^*(\phi(x)),$$

où $x \in T$ est vu comme un T^{op}-dg-module par le plongement de Yoneda $T \hookrightarrow \widehat{T}$. En particulier, lorsque $A = k$ et $u : Spec\, k \longrightarrow \mathcal{M}_T$ correspdond à un objet $y \in T$, on trouve la formule suivante pour la fibre en u de $\phi(x)$

$$\phi(x)_y := u^*(\phi(x)) \simeq T(x, y) \in L_{parf}(k).$$

On suppose maintenant que l'on est sous les hypothèses du théorème 6.1: on se fixe un système de points $\mathcal{P}$ de dimension d et une t-structure sur T qui satisfont aux conditions suivantes.

- La t-structure est parfaite et ouverte.
- La famille de points $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure.
- La famille de points $\mathcal{P}$ est bornée.

Par le théorème 6.1 on dispose d'une sous-champ ouvert $j : \mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{M}_T$, qui est une $\mathbb{G}_m$-gerbe sur un espace algébrique lisse et séparé $M_{\mathcal{P}}$. En composant ϕ avec la restriction le long de j on trouve un dg-foncteur

$$\phi_{\mathcal{P}} : \; T^{op} \xrightarrow{\phi} L_{parf}(\mathcal{M}_T) \xrightarrow{j^*} L_{parf}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}).$$

En utilisant la description des fibres des objets $\phi(x)$ que l'on donne ci-dessus, on voit que le dg-foncteur $\phi_{\mathcal{P}}$ se factorise par la sous-dg-catégorie $L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}) \subset L_{parf}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ des objets de poids 1.

Définition 7.1. *Avec les conditions et les notations précédentes, le* dg-foncteur de décomposition associé à la paire $(T,\mathcal{P})$ *est le dg-foncteur*

$$\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$$

défini ci-dessus.

Intuitivement, l'espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$ est un espace de modules pour les objets de $\mathcal{P}$, et le dg-foncteur $\phi_{\mathcal{P}}$ décompose chaque objet $x \in T$ en un complexe parfait $\phi_{\mathcal{P}}(x)$ au-dessus de $M_{\mathcal{P}}$ dont la fibre en $y \in M_{\mathcal{P}}$ est le complexe $T(x,y)$. La non-existence de l'objet universel sur $M_{\mathcal{P}}$, controlée par la gerbe $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, implique que $\phi(x)$ existe uniquement comme un complexe parfait tordu sur $M_{\mathcal{P}}$. D'une certaine façon, le dg-foncteur $\phi_{\mathcal{P}}$ doit être considéré comme un foncteur de *décomposition spectrale* des objets de T au-dessus de l'espace des modules des objets simples de la catégorie abélienne $\mathcal{H}$.

Nous arrivons enfin au théorème principal de ce travail.

Théorème 7.2. *Soit T une dg-catégorie saturée munie d'un système de points $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions ci-dessous.*

- *La t-structure est parfaite et ouverte.*
- *La famille de points $\mathcal{P}$ co-engendre fortement la t-structure.*
- *La famille de points $\mathcal{P}$ est bornée.*

Le dg-foncteur de décomposition

$$\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$$

est conservatif. C'est une quasi-équivalence si et seulement si l'espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$ est propre sur $Spec\, k$.

Preuve: La conservativité est une conséquence directe de la formule donnant la fibre de $\phi_{\mathcal{P}}(x)$ en un point global $y \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(k)$

$$\phi_{\mathcal{P}}(x)_y \simeq T(x,y),$$

et de la définition d'un système de points $\mathcal{P}$ (voir définition 5.2).

Supposons pour commencer que $\phi_{\mathcal{P}}$ soit une quasi-équivalence. Comme T est propre, le fait que $\phi_{\mathcal{P}}$ est une équivalence implique que $L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ est une dg-catégorie propre.

Lemme 7.3. *Soit X un espace algébrique de type fini et séparé sur $Spec\, k$, et $\mathcal{X} \longrightarrow X$ une $\mathbb{G}_m$-gerbe sur X. Si la dg-catégorie $L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{X})$ est propre alors X est propre sur $Spec\, k$.*

Preuve du lemme: Supposons que X ne soit pas propre. Alors, il existe une courbe affine lisse C et un morphisme fini $p : C \longrightarrow X$. Par [To4, Cor. 5.2] (on se ramène aisément au cas où X schéma en utilisant le lemme de Chow, comme par exemple dans [To-Va2, Prop. B1]). Choisissons un générateur compact $K \in L_{parf}^{\chi=1}(\mathcal{X})$ de la dg-catégorie dérivée tordue $L^{\chi=1}(\mathcal{X})$, que nous supposerons aussi générateur compact local. Notons $\mathcal{A}_X := \mathbb{R}\underline{End}(K) \in L_{parf}(X)$ la dg-algèbre d'Azumaya sur X correspondante.

Notons $E := p^*(\mathcal{A}_X) \in L_{parf}(C)$. Pour tout $V \in L(C)$, on a

$$\mathbb{R}\Gamma(C, V \otimes E) \simeq \mathbb{R}\Gamma(X, p_*(V) \otimes \mathcal{A}_X) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(K, p_*(V) \otimes K).$$

Ainsi, comme $L^{\chi}_{parf}(\mathcal{X})$ est propre, le complexe $\mathbb{R}\Gamma(C, V\otimes E)$ est parfait sur k. Comme C est affine et que $\mathcal{A}_X$ est un générateur compact local, E est un générateur compact de $L(C)$, et le faisceau structural $\mathcal{O}_C$ appartient donc à la sous-catégorie triangulée épaisse engendrée par E. Cela implique donc que $\mathbb{R}\Gamma(C, V)$ est parfait pour tout complexe parfait V sur C, et en particulier pour $V = \mathcal{O}_C$. Ceci est une contradiction car C est une courbe affine. □

Il nous reste à montrer que si $M_{\mathcal{P}}$ est propre alors $\phi_{\mathcal{P}}$ est une équivalence. Tout d'abord on sait que $L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X})$ est une dg-catégorie saturée (voir [To4, Cor. 5.4] (4) pour X un schéma, et le cas des espaces algébriques se ramène au cas des schémas par le lemme de Chow comme dans [To-Va2, Prop. B1]). Par ailleurs, il existe un système de points $\mathcal{P}'$ de dimension d dans $L^{\chi}_{parf}(\mathcal{X})$ défini par les points de X de la manière suivante. Pour $x \in X(k)$, on considère la gerbe résiduelle $\mathcal{X}_x := \mathcal{X}\times_X \{x\} \simeq B\mathbb{G}_m$, ainsi que le morphisme naturel $j_x : \mathcal{X}_x \longrightarrow \mathcal{X}$. On note L la représentation de rang 1 de $\mathbb{G}_m$ et de poids 1 que l'on voit comme un objet de $L[-d] \in L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X}_x)$. Par définition, $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des classes d'équivalence des objets de la forme $(j_x)_*(L[-d]) \in L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X})$ (il est donc en bijection naturelle avec les points de X). Il est facile de vérifier que $\mathcal{P}'$ est un système de points dans $L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X})$ au sens de la définition 5.2.

Nous allons maintenant appliquer le lemme 5.3 au dg-foncteur de décomposition

$$\phi_{\mathcal{P}} : T^{op} \longrightarrow L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X}),$$

avec les systèmes de points $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il faut montrer que $\phi_{\mathcal{P}}$ induit une quasi-équivalence entre les deux sous-dg-catégories pleine de T^{op} et $L^{\chi=1}_{parf}(\mathcal{X})$ définies par les ensembles de points $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Pour cela, on rappelle que si $x, y \in T^{op}$, alors $\phi_{\mathcal{P}}(x)_y \simeq T(x, y)$, où $\phi_{\mathcal{P}}(x)_y = (j_y)^*(\phi_{\mathcal{P}}(x))$ et $j_y : \mathcal{X}_y \longrightarrow \mathcal{X}$ est la gerbe résiduelle en y. Cette identification pour $x = y$ nous donne un morphisme naturel dans $L(\mathcal{X}_x)$

$$(j_x)^*(\phi_{\mathcal{P}}(x)) \simeq T(x,x) \longrightarrow H^d(T(x,x))[-d] \simeq L[-d].$$

Par adjonction ceci définit des morphismes dans $L(\mathcal{X})$

$$\phi_{\mathcal{P}}(x) \longrightarrow (j_x)_*(L[-d]),$$

qui sont des équivalences. Ainsi, le dg-foncteur $\phi_{\mathcal{P}}$ identifie les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, en identifiant un point $x \in \mathcal{P}$ à l'objet $(j_x)_*(L)[-d] \in L(\mathcal{X})$. Cette description implique aussi que $\phi_{\mathcal{P}}$ est pleinement fidèle lorsque il est restreint aux objets de $\mathcal{P}$. □

8. Deux exemples

Nous donnons pour terminer deux exemples de situations qui illustrent le théorème 7.2. Cependant, nous ne donnons pas les détails des preuves que les hypothèses sont effectivemet vérifées dans chacun des cas. Il existe par ailleurs de nombreux autres exemples qui mériteraient d'être étudiés, comme par exemple les flops en dimension 3 de [Br].

Gerbes sur un groupe fini. Soit Z un espace algébrique propre et lisse sur $Spec\, k$. Soit $\mathcal{Z}$ un champ algébrique muni d'un morphisme $\pi : \mathcal{Z} \longrightarrow Z$. On suppose que localement pour la topologie étale sur Z le morphisme π est équivalent à la projection $Z\times BG \longrightarrow Z$ pour un groupe fini G (qui n'est bien défini que localement). On supposera pour simplifier que Z est connexe, de sorte que la classe de conjugaison du groupe G ne dépende pas du choix du point $z \in Z$. On considère $T := L_{parf}(\mathcal{Z})$ la dg-catégorie des complexes parfaits sur $\mathcal{Z}$. D'après [To4, Cor. 5.4] (et l'astuce du lemme de Chow de [To-Va2, Prop. B1]) on sait que T est une dg-catégorie propre et lisse sur k.

Nous définissons un système de points $\mathcal{P}$ de dimension $d = dim\, Z$ de la manière suivante. Soit $z \in Z$ un point fermé, et notons $\mathcal{Z}_z := \pi^1(z)$ la gerbe résiduelle du champ $\mathcal{Z}$ en z. Le champ $\mathcal{Z}_z$ est, de manière non-canonique, équivalente à BG pour G un groupe fini. Cela implique que la catégorie des faisceaux quasi-cohérents $QCoh(\mathcal{Z}_z)$ s'écrit comme un produit fini de catégorie de k-espaces vectoriels $\prod_{\rho \in I(z)} Vect(k)$, où $I(z)$ est un ensemble fini de représentant d'objets simples dans $QCoh(\mathcal{Z}_z)$. Si l'on choisit un équivalence $\mathcal{Z}_z \simeq BG$, l'ensemble $I(z)$ peut s'identifier à un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de représentations linéaires de G sur k. Nous noterons

On pose

$$\mathcal{P} := \coprod_{z \in Z} \coprod_{\rho \in I(z)} (j_z)^*(\rho),$$

où $j_z : \mathcal{Z}_z \hookrightarrow \mathcal{Z}$ est l'immersion canonique. L'ensemble $\mathcal{P}$ est un ensemble de faisceaux cohérents sur le champ $\mathcal{Z}$ que l'on considère comme des objets de T. La paire $(T, \mathcal{P})$ vérifie les hypothèses du théorème 7.2. L'espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$ est ici un espace algébrique fini et étale sur Z, dont la fibre en $z \in Z$ est l'ensemble fini des classes d'isomorphismes de représentations linéaires du groupe G. L'espace $M_{\mathcal{P}}$, ainsi que la classe $\alpha \in H^2_{et}(Z, \mathbb{G}_m)$ de la $\mathbb{G}_m$-gerbe $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \longrightarrow M_{\mathcal{P}}$ peuvent se décrire explicitement de la manière suivante. On choisit un point de base $z \in Z(k)$, et une identification $\mathcal{Z}_z \simeq BG$, de sorte que $\mathcal{Z} \longrightarrow Z$ s'identifie à une forme tordue, pour la topologie étale de BG. La projection π est donc classée par un morphisme de champs

$$Z \longrightarrow BAut(BG),$$

où $Aut(BG)$ est le 2-groupe des auto-équivalences de BG. On se fixe une identification $QCoh(BG) \simeq \oplus_I Vect(k)$, avec I un ensemble fini qui s'identifie aux classes d'isomorphisme de représentations irrécutibles de G sur k. Le champ en groupe des auto-équivalences de $\oplus_I Vect(k)$ est un produit semi-direct $\Sigma_I \rtimes B(\mathbb{G}_m)^I$. On dipose ainsi d'un morphisme de 2-champs $BAut(BG) \longrightarrow B(\Sigma_I \rtimes B(\mathbb{G}_m)^I)$, et donc d'un morphisme classifiant

$$q : Z \longrightarrow B(\Sigma_I \rtimes B(\mathbb{G}_m)^I).$$

Ce morphisme détermine le champ en catégories $\mathcal{O}_Z$-liéaires $\pi_*(QCoh)$ sur le petit site étale Z_{et}.

On a une suite de fibrations de 2-champs

$$B(\mathbb{G}_m)^I \longrightarrow B(\Sigma_I \rtimes B(\mathbb{G}_m)^I) \longrightarrow B\Sigma_I.$$

La donnée de la projection $p : Z \longrightarrow B(\Sigma_I)$ détermine un revêtement étale fini $r : Z' \longrightarrow Z$ de fibre I. Par ailleurs, le relèvement de p en un morphisme q

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & B(\Sigma_I \rtimes B(\mathbb{G}_m)^I) \arrow[d] \\ & B(\Sigma_I), \end{tikzcd}$$

détermine une classe de cohomologie $\alpha \in H^2_{et}(Z, A)$, où A est une forme tordue du faisceau $\mathbb{G}_m^I$. Cette forme tordue n'est autre que $r_*(\mathbb{G}_m)$, l'image direct du faisceau $\mathbb{G}_m$ par le revêtement fini $r : Z' \longrightarrow Z$. On trouve donc ainsi une classe

$$\alpha \in H^2_{et}(Z', r_*(\mathbb{G}_m)) \simeq H^2_{et}(Z', \mathbb{G}_m).$$

Avec ces notations, l'espace algébrique $M_{\mathcal{P}}$ s'identifie naturellement à Z', et α ainsi construit est la classe de la gerbe $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \longrightarrow M_{\mathcal{P}}$.

Le théorème 7.2 induit ainsi une équivalence naturelle

$$L_{parf}(\mathcal{Z}) \simeq L^{\alpha}_{parf}(Z'),$$

où $L^{\alpha}_{parf}(Z')$ est la dg-catégorie des complexes parfaits sur Z' tordus par la classe α. Cet énoncé est en réalité vrai sans les hypothèses de lissité et de propreté sur Z, comme cela peut se voir de manière directe.

Correspondance de McKay. Soit X une surface projective, lisse et connexe sur k munie d'une trivialisation $\omega : \omega_X \simeq \mathcal{O}_X$. On se donne un groupe fini G qui opère sur X en fixant la trivialisation ω. On considère $T := L_{parf}([X/G])$ la dg-catégorie des complexes parfaits sur le champ quotient $[X/G]$, qui s'identifie naturellement à la dg-catégorie des complexes parfaits G-équivariants sur X. On définit un système de points $\mathcal{P}$ de dimension 2 dans T de la manière suivante. On considère les cohérents G-équivariants $\mathcal{F}$ sur X qui vérifient les deux conditions suivantes.

- $\mathcal{F}$ est le faisceau structural d'un sous-schéma fini de X de longueur $\sharp G$.
- La représentation G sur $\Gamma(X, \mathcal{F})$ est isomorphe à la représentation régulière.

Ces faisceaux cohérents forment une famille d'objets dans T, et nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble de leurs classes d'équivalences dans T. Le couple $(T, \mathcal{P})$ vérifie les conditions du théorème 7.2. Dans cet exemple $M_{\mathcal{P}} \simeq Z$ est propre, et la $\mathbb{G}_m$-gerbe est ici triviale. Ainsi, le théorème 7.2 implique l'existence d'une équivalence

$$L_{parf}([X/G]) \simeq L_{parf}(Z),$$

qui est une incarnation de la correspondance de McKay (voir par exemple [Br-Ki]).

Références

[Ab] Abouzaid, M. *Family Floer cohomology and mirror symmetry.* ICM lecture, Seoul 2014.

[BBD] Beilinson, A. A.; Bernstein, J.; Deligne, P. *Faisceaux pervers.* Analyse et topologie sur les espaces singuliers I (Luminy, 1981), 5-171, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Br] Bridgeland, T. *Flops and derived categories.* Invent. Math. **147** (2002), no. 3, 613-632.

[Br-Ki] Bridgeland, T.; King, A. *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories.* J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535-554

[Ho] Hovey, M. *Model Categories.* Mathematical Surveys and Monographs, vol 63, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.

[Ke] Keller, B. *On differential graded categories.* International Congress of Mathematicians. Vol. II, 151-190, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[Ke-Vo] Keller, B. ; Vossieck, D. *Aisles in derived categories.* Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988), 239-253.

[Lu1] Lurie, J. *The "DAG" series.* Available at the author home page http://www.math.harvard.edu/ lurie/

[Lu2] Lurie, J. *On the Classification of Topological Field Theories.* Current Developments in Mathematics, vol. 2008, 129-280, Int. Press, Somerville, 2009.

[Lu3] Lurie, J. *Moduli problems for ring spectra.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, 1099-1125, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Lu4] Lurie, J. *Higher Algebra.* Available at the author home page http://www.math.harvard.edu/ lurie/

[Or] Orlov, D. *Equivalences of derived categories and K3 surfaces.* Journal of Mathematical Sciences. Vol. **84**, no. 5, 1997.

[Pa-To-Va-Ve] Pantev, T.; Toën, B.; Vaquié, M.; Vezzosi, G. *Shifted symplectic structures.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271-328.

[Ro] Rouquier, R. *Catégories dérivées et géométrie birationnelle (d'après Bondal, Orlov, Bridgeland, Kawamata et al.).* Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque No.**307** (2006), Exp. No. 946, viii, 283-307.

[Ta1] Tabuada, G. *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 1, 15-19.

[Ta2] Tabuada, G. *A guided tour through the garden of noncommutative motives.* Topics in noncommutative geometry, 259-276, Clay Math. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[Ta3] Tabuada, G. *Differential graded versus simplicial categories.* Topology Appl. **157** (2010), no. 3, 563-593.

[To1] Toën, B. *Derived Algebraic Geometry.* EMS Surv. Math. Sci. 1 (2014), no. **2**, 153-245.

[To2] Toën, B. *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory.* Invent. Math. **167** (2007), no. 3, 615-667.

[To3] Toën, B. *Lectures on dg-categories.* Topics in Algebraic and Topological *K*-theory. lectures Notes in mathematics, vol. 2008, Springer, 2011.

[To4] Toën, B. *Derived Azumaya algebras and generators for twisted derived categories.* Invent. Math. **189** (2012), no. 3, 581-652.

[To-Va1] Toën, B.; Vaquié, M. *Moduli of objects in dg-categories.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40** (2007), no. 3, 387-444.

[To-Va2] Toën, B.; Vaquié, M. *Algébrisation des variétés analytiques complexes et catégories dérivées.* Math. Ann. **342** (2008), no. 4, 389-831.

[To-Ve1] Toën, B.; Vezzosi, G. *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory.* Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257-372.

[To-Ve2] Toën, B.; Vezzosi, G. *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications.* Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp.

IMT UMR 5219, CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse - France
E-mail address: `bertrand.toen@math.univ-toulouse.fr`

IMT UMR 5219, CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse - France
E-mail address: `michel.vaquie@math.univ-toulouse.fr`